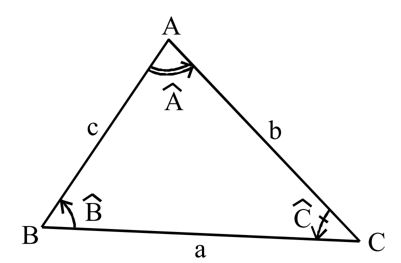
Preuve de la formule des sinus utilisant les complexe

La formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

exprime la proportionnalité entre les longueurs des côtés a, b, c d'un triangle ABC et les sinus des angles de ce triangle. Comme nous allons le voir, cette formule peut se démontrer joliment en utilisant les expressions complexes de similitudes directes.



Notons $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles géométriques du triangle, ou plus exactement les mesures dans $[0, \pi]$ de ces angles. Il est toujours possible d'orienter le plan de sorte que le triangle ABC soit direct. Dans ce cas $\widehat{A}$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (modulo 2π), $\widehat{B}$ est une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, et $\widehat{C}$ une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Rapportons le plan à un repère orthonormal direct et notons de façon générale z_M l'affixe d'un point M dans ce repère. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{b}{c}\, e^{i\widehat{A}} \\[2ex] \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{a}{c}\, e^{-i\widehat{B}} \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{b}{c}\, e^{i\widehat{A}} + \frac{a}{c}\, e^{-i\widehat{B}} = 1.$$

Il suffit alors d'égaler les parties imaginaires des deux membres pour obtenir :

$$\frac{b}{c}\, \sin \widehat{A} = \frac{a}{c}\, \sin \widehat{B}$$

soit $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}}$.

Remarque — Rappelons que la formule complète s'écrit :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

où R et S désignent le rayon du cercle circonscrit au triangle et son aire. Une preuve classique de cette formule consiste à introduire le point B' diamétralement opposé à B sur le cercle

[0] [b1110819] 18 août 2011 Site Web MegaMaths

circonscrit, puis à utiliser le triangle rectangle $BB'C$ et la cocyclicité des points A, B, B', C pour écrire :

$$\widehat{A} = \sin|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = |\sin(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C})| = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R}.$$

L'expression utilisant S s'obtient alors en rappelant que $S = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$. D'autres preuves existent (voir par exemple [1] Question 149).

References

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, Publibook, 2010.